

Darcy, Forchheimer, そして Manning

登坂博行(東大)

(吉岡真弓(産総研)、佐々木憲二(crearia))



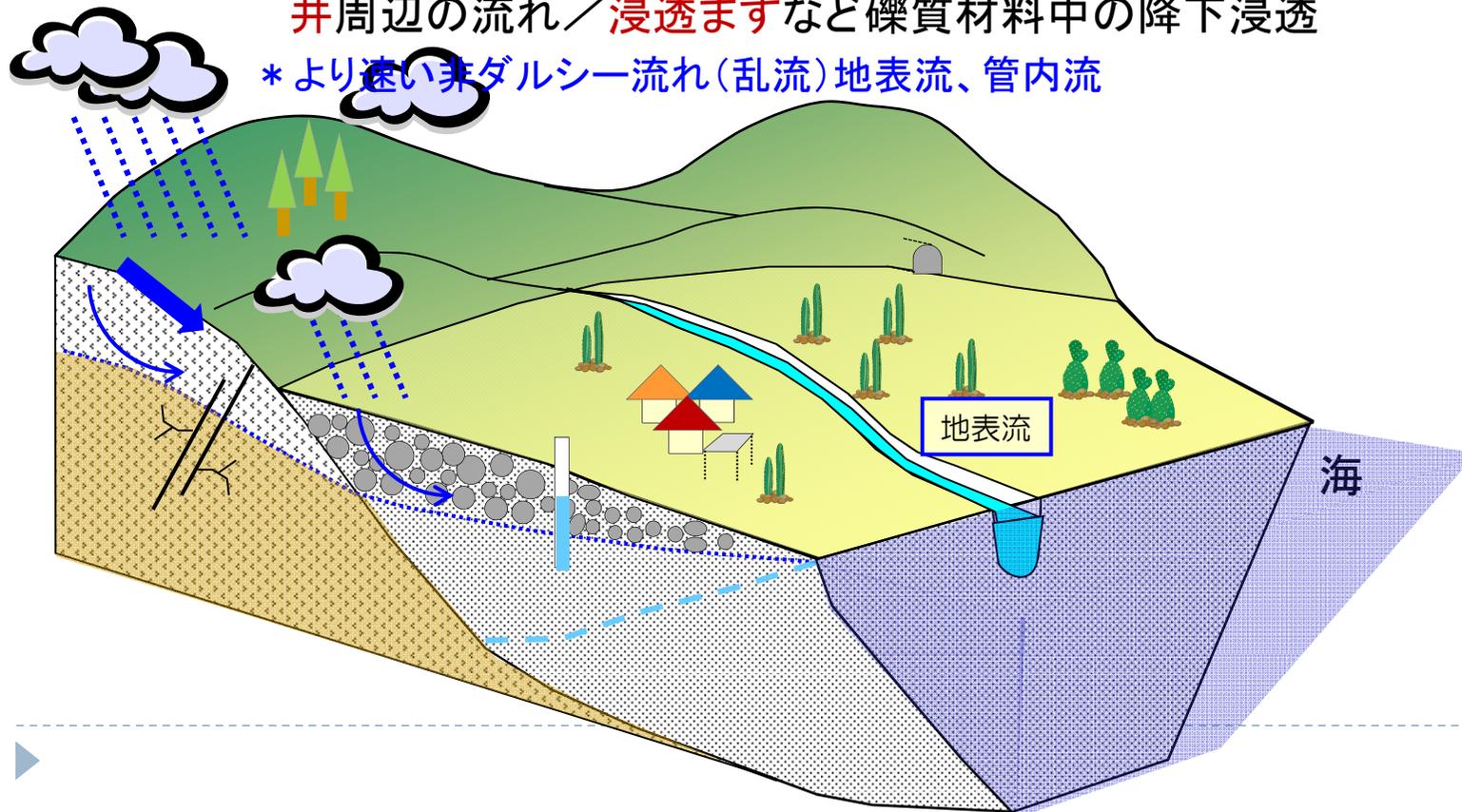
流れの場の概念 (吉岡、2010、地下水学会を改変)

地圏には様々な流れが起こる

岩石間隙、土壌間隙中の流動: 穏やかな流れ→ダルシー流れ

土壌パイプなどの発達した地下浅部の降下浸透、側方流／割れ目系岩盤中の降下浸透、トンネル湧水／石灰岩の溶食亀裂中の流れ／崖錐礫、扇状地扇頂付近の礫、礫質帯水層中の降下浸透／揚水井、注水井周辺の流れ／浸透ますなど礫質材料中の降下浸透

* より速い非ダルシー流れ(乱流) 地表流、管内流

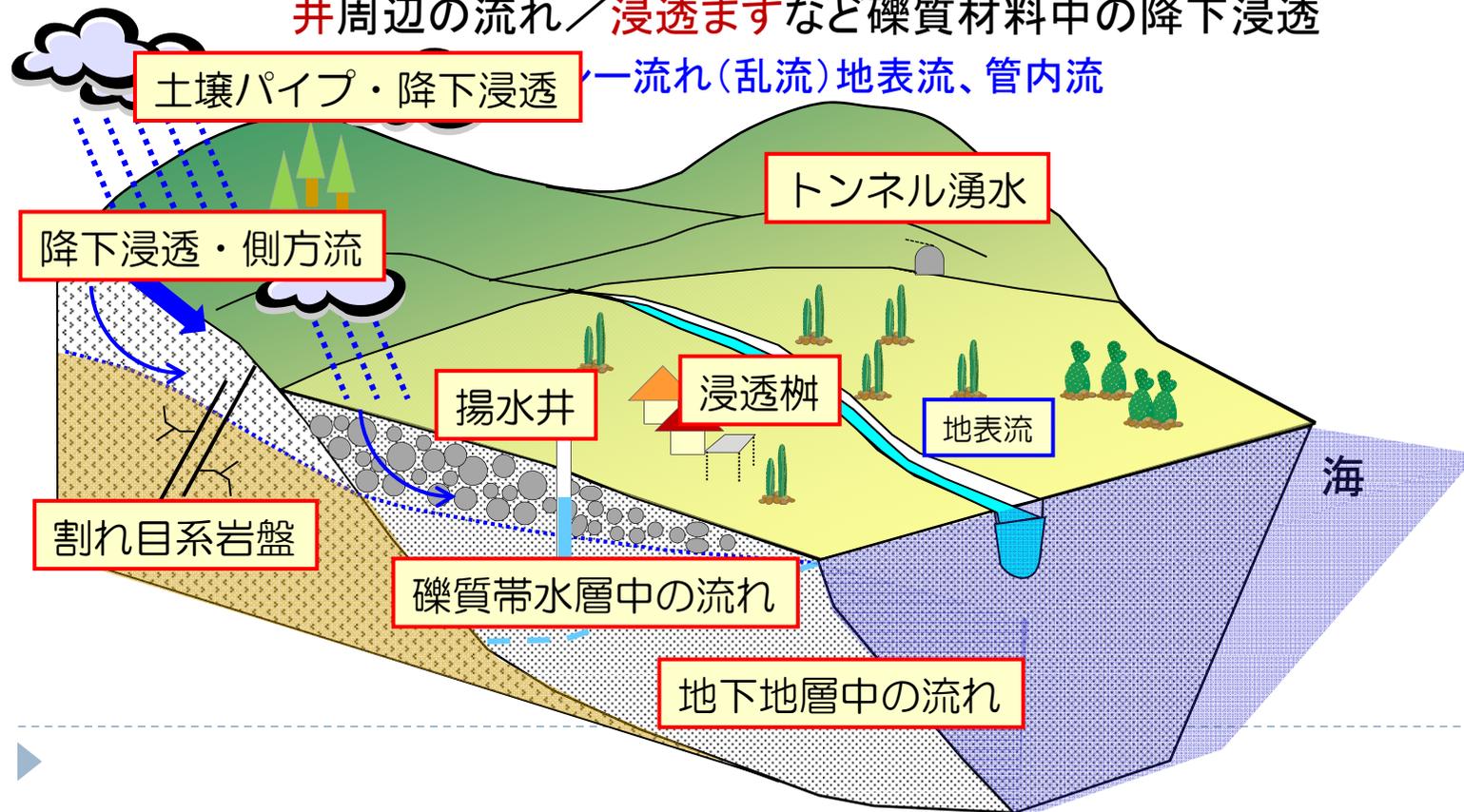


流れの場の概念 (吉岡、2010、地下水学会を改変)

地圏には様々な流れが起こる

岩石間隙、土壌間隙中の流動: 穏やかな流れ→ダルシー流れ

土壌パイプなどの発達した地下浅部の降下浸透、側方流 / 割れ目系岩盤中の降下浸透、トンネル湧水 / 石灰岩の溶食亀裂中の流れ / 崖錐礫、扇状地扇頂付近の礫、礫質帯水層中の降下浸透 / 揚水井、注水井周辺の流れ / 浸透ますなど礫質材料中の降下浸透



水の流れに関し、我々は大きく3つのレジームを知っている。

乱流状態

$$J = bu^2$$

慣性流状態

$$J = au + bu^2$$

流路の拡縮によりエネルギーが失われる効果を伴う流れ

層流状態

$$J = au$$



河川屋はManningの乱流世界に住む

(地表流、河川流、管内流など)

$$u = \frac{R^{2/3}}{n} \sqrt{\left| \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right|}, \quad \Psi = z + h$$

水路勾配+水深勾配

$$R = \left(\frac{Wh}{W + 2h} \right) \quad (\text{rectangular open channel})$$

$$R = \left(\frac{\pi r^2}{2\pi r} \right) = \frac{r}{2} \quad (\text{tube}) \quad \text{径深 (hydraulic radius)}$$

$$J = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \left(\frac{n^2}{R^{4/3}} \right) u^2 = b u^2$$



地下水屋はDarcyの世界に住む

(土壌や岩石などの多孔質体中の流体流動)

$$u = -\frac{K}{\mu} \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \Psi = P + \rho g z$$

$$J = \left| \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right| = \frac{\mu}{K} |u|$$

u_D : Darcy流速 [m/s]	K : 浸透率 [m ²]
μ : 粘性係数 [Pa · s]	x : 位置 [m]
Ψ : ポテンシャル [Pa]	



直列の法則

- 低透水部が律速する。
- 直列媒体の平均浸透率は調和平均的となる

$$\overline{K} = \frac{l_1 + l_2}{\left(\frac{l_1}{K_1} + \frac{l_2}{K_2} \right)}$$

$$K_1 = 10^{-8} m^2, K_2 = 10^{-12} m^2 \\ l_1 = 1.0 m, l_2 = 1.0 m$$

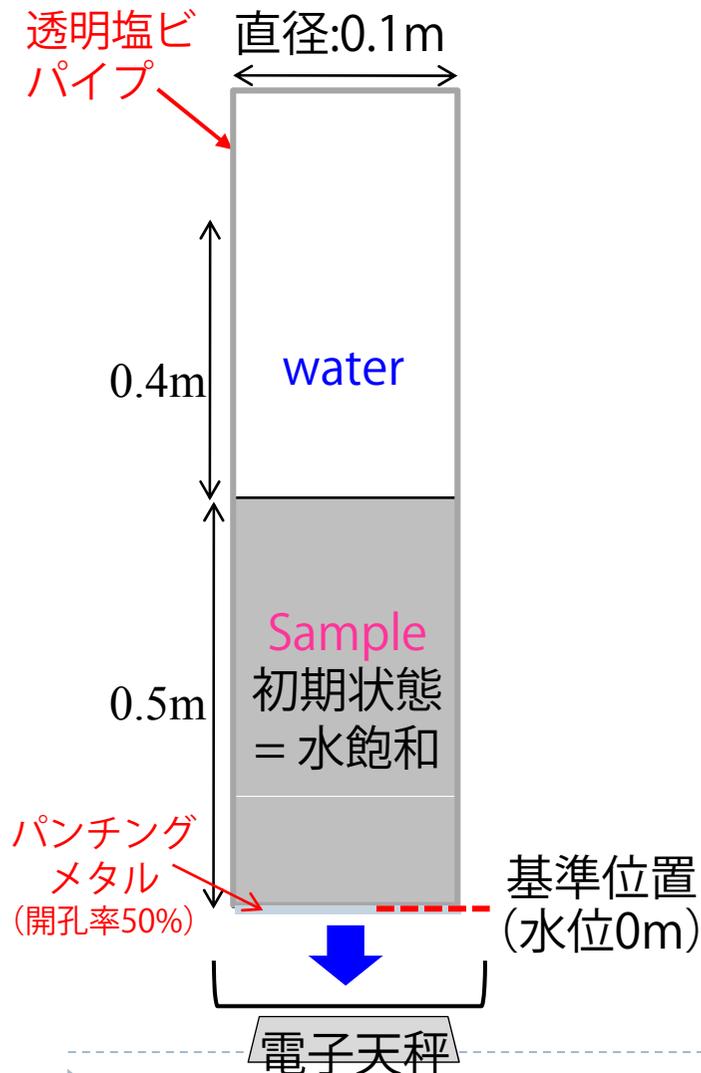
$$\overline{K} \approx 2 \times 10^{-12} m^2$$

- 一部に低透水媒体があると全体もDarcy流れと考えてよい。
 - 高透水媒体中でも飽和流れは玉突き状態で、Darcyと考えてよい。
 - 地下深部の流れは、大亀裂があってもDarcy流れと考えてよい。
-

中間的な流れはどこにあるのか？



降下浸透実験 (吉岡ら, 2010)



装置

カラム長さ 1.0m 直径: 0.1m
 試料長さ 0.5m
 初期状態 試料は水飽和、初期水位は0.9m
 追加注入量 300ml / 500ml

方法

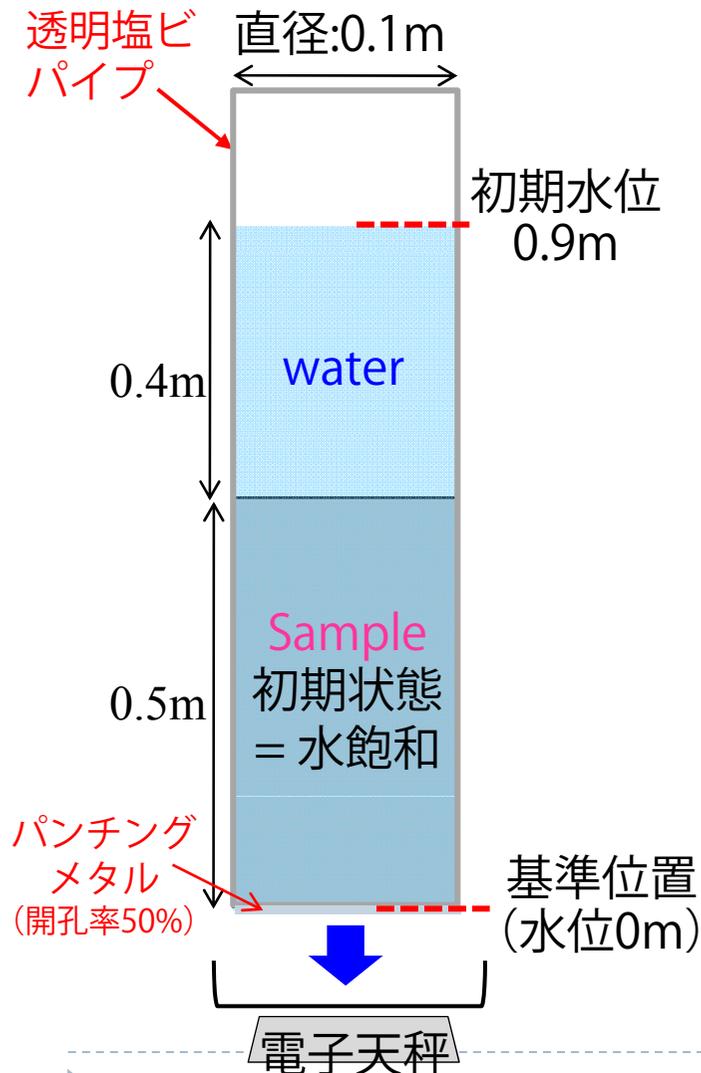
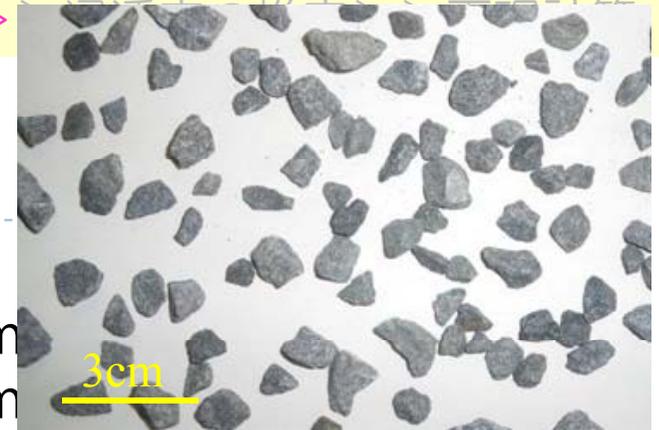
初期状態から下方を開放し、
飽和流れ→不飽和流れに至る累積流出量を
 電子天秤により測定する。
 測定開始から約60秒後に追加注水を行う。

試料物性

Case	材質	粒径	間隙率
B05	ガラスビーズ	5mm	0.42
B10	ガラスビーズ	10mm	0.45
CR	砕石	5mm*	0.40

*砕石の粒径は平均等価体積粒径

降下浸透実験 (吉岡ら, 2010)



装置

カラム長さ 1.0m
 試料長さ 0.5m
 初期状態 試料は水飽和、初期水位は0.9m
 追加注入量 300ml / 500ml

方法

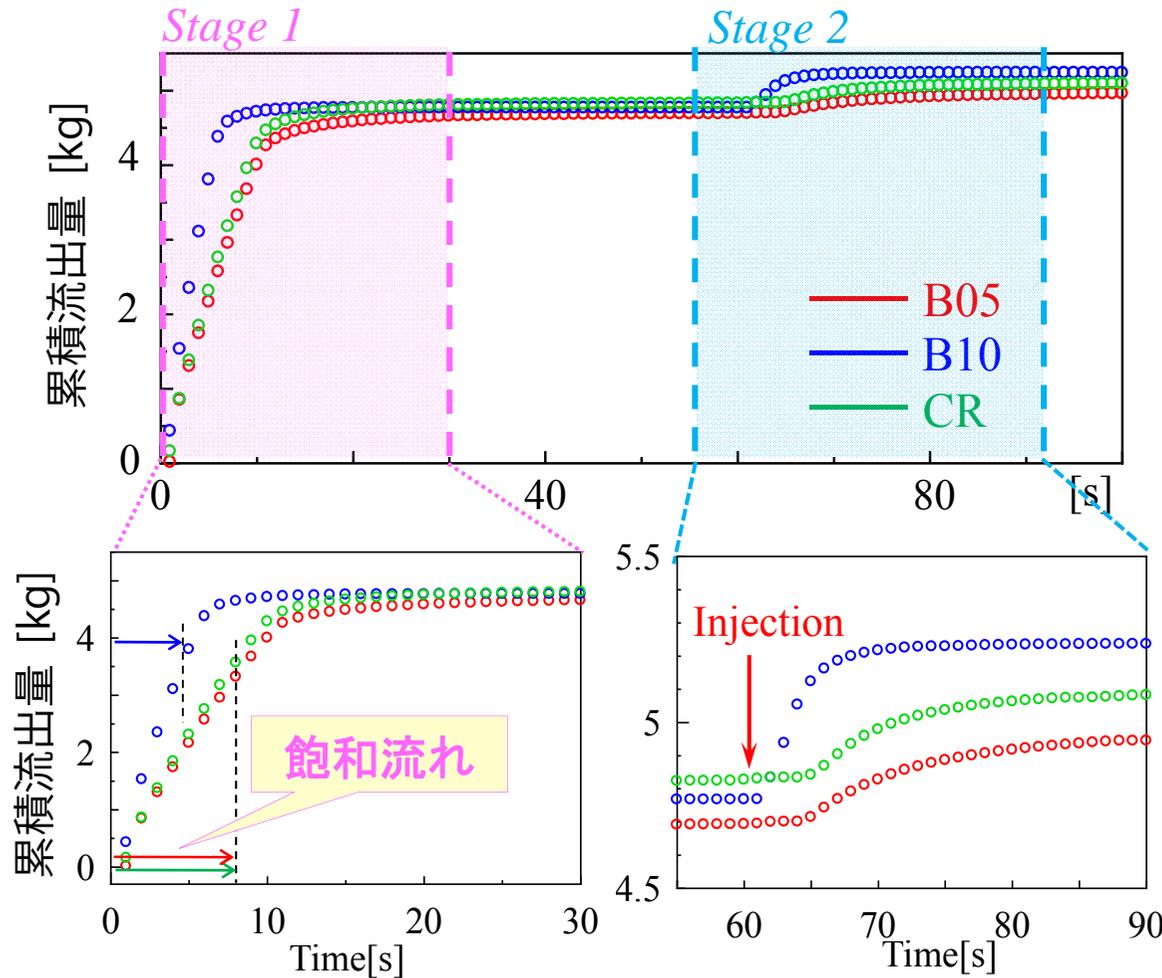
初期状態から下方を開放し、
飽和流れ → 不飽和流れ に至る累積流出量を
 電子天秤により測定する。
 測定開始から約60秒後に追加注水を行う。

試料物性

Case	材質	粒径	間隙率
B05	ガラスビーズ	5mm	0.42
B10	ガラスビーズ	10mm	0.45
CR	碎石	5mm*	0.40

*碎石の粒径は平均等価体積粒径

降下浸透実験結果 (吉岡, 2010)



累積流出量の時間変化

飽和流れの区間における
バルク流速

Case	バルク流速[m/s]
B05	0.056
B10	0.11
CR	0.061

飽和流れの区間における
レイノルズ数 R_e

Case	R_e
B05	332
B10	1221
CR	275

Darcy領域 $Re < 1 \sim 10$ → 非Darcy流れ

このような高透水媒体の飽和から不飽和にわたる挙動を再現できるか？



Darcy型 2相流れのモデル

2成分2相流体系の質量保存式

$$\boxed{\text{水相}} \quad -\frac{\partial}{\partial x} (u_{D,w} \rho_w k_{r,w}) - \rho_w q_w = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_w \phi S_w)$$

$$\boxed{\text{気相}} \quad -\frac{\partial}{\partial x} (u_{D,g} \rho_g k_{r,g}) - \rho_g q_g = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_g \phi S_g)$$

$u_{D,p}$: p 相のDarcy流速[m/s]
 ρ_p : p 相の密度[kg/m³]
 S_p : p 相の飽和度[-]
 ϕ : 間隙率[-]
 $k_{r,f}$: 相対浸透率[-]
 $\rho_p q_p$: p 相の質量生産速度[kg/(m³s)]
 p : 相 (w :水相, g :気相)

相対浸透率(k_{rw}, k_{rg})・毛管圧力(h_c): van Genuchtenモデル

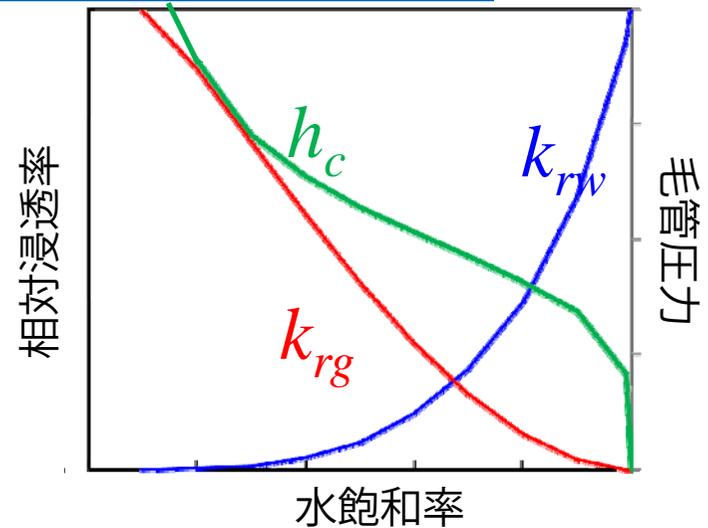
$$h_c = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1 - S_e^{1/m}}{S_e^{1/m}} \right)^{1/n} \quad k_{rw} = Se^{1/2} \left(1 - (1 - Se^{1/m})^m \right)^2$$

$$k_{rg} = (1 - Se)^r \left(1 - Se^{1/m} \right)^{2m}$$

ここで

$$Se = \frac{S_w - S_{wr}}{1 - S_{wr}}, \quad m = 1 - 1/n, \quad r = 1/3$$

Se : 有効飽和度 S_w, S_{wr} : 飽和率, 残留飽和率



van Genuchtenモデルによる
相対浸透率・毛管圧—水飽和率曲線

非Darcy型2相流れのモデル予想形（吉岡ら、2010）

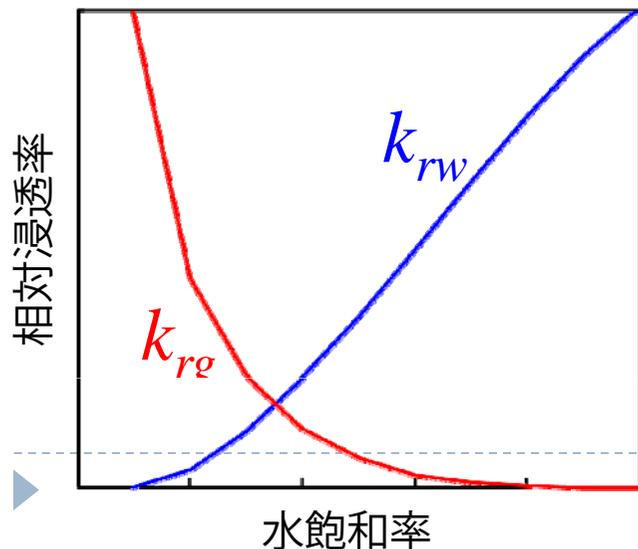
Darcy型とのアナロジーで予想されるもの
→実験的に適切性の検討が必要

2成分2相流体系の質量保存式

水相 $-\frac{\partial}{\partial x}(\underline{u_{F,w}} \rho_w \boxed{k_{r,w}}) - \rho_w q_w = \frac{\partial}{\partial t}(\rho_w \phi S_w)$

気相 $-\frac{\partial}{\partial x}(\underline{u_{F,g}} \rho_g \boxed{k_{r,g}}) - \rho_g q_g = \frac{\partial}{\partial t}(\rho_g \phi S_g)$

相対浸透率(k_{rw} , k_{rg}) : van Genuchtenモデル



吉岡他（2010）ではvan Genuchtenモデルを用い、

毛管圧力(h_c)=0

$n = -2$

を与えることで、実験結果を良好に再現。

Forchheimerの流速の式

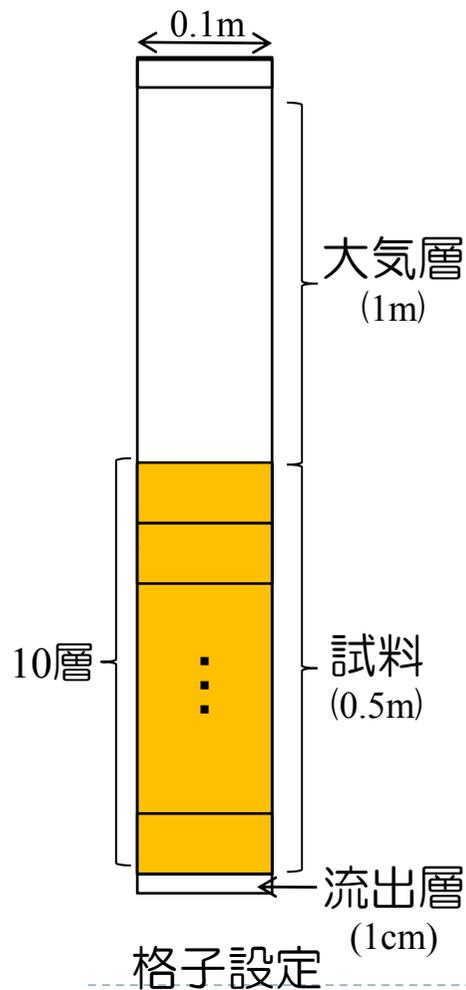
$$u_{F,p} = \frac{-a' + \sqrt{a'^2 + 4b'|\partial\psi/\partial x|}}{2b'}$$

Ergunらの係数で表わすと、

$$a' = a\rho_p g = \frac{\mu_p}{K_p} \quad b' = b\rho_p g$$

実験結果の再現性の検討(吉岡ら, 2010)

計算設定



初期状態

水飽和度：水飽和状態(=0.999)

温度：一定 (28°C)

圧力：静水圧分布 (大気・流出層=1013.25hPa)

大気層には微小値
(1.0×10^{-5}) を設定

注入設定

注入量：500ml / 300ml at 62秒後

* 本計算では毛管圧力=0として設定。

計算時間：240秒

タイムステップ：最大1秒 (収斂状況に合わせて可変)

浸透率 → 推定した浸透率を使用

相対浸透率 → van Genuchtenの係数 n を変化

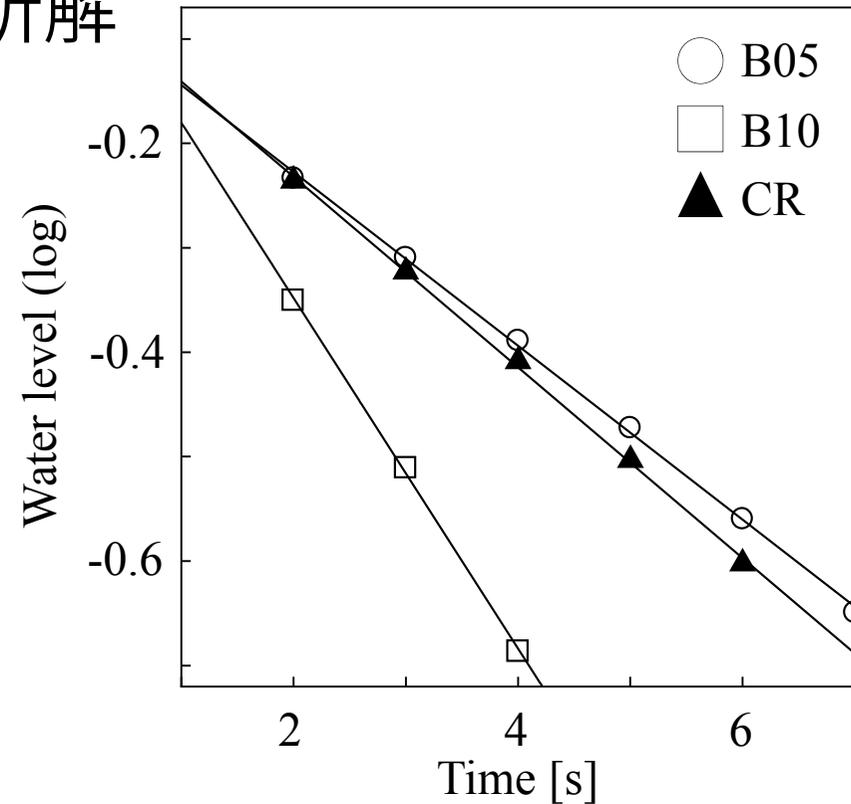
最下層の流出層への累積流出曲線と実験結果を比較する。

媒体の浸透率の推定

変水位試験のDarcy型解析解

$$-adh = kA \frac{h}{L} dt$$

$$\ln \frac{h(t)}{h_0} = \frac{KA}{aL} t$$



実験値はほぼ直線的！

この実験は $Re > 100$ だがDarcy 的？

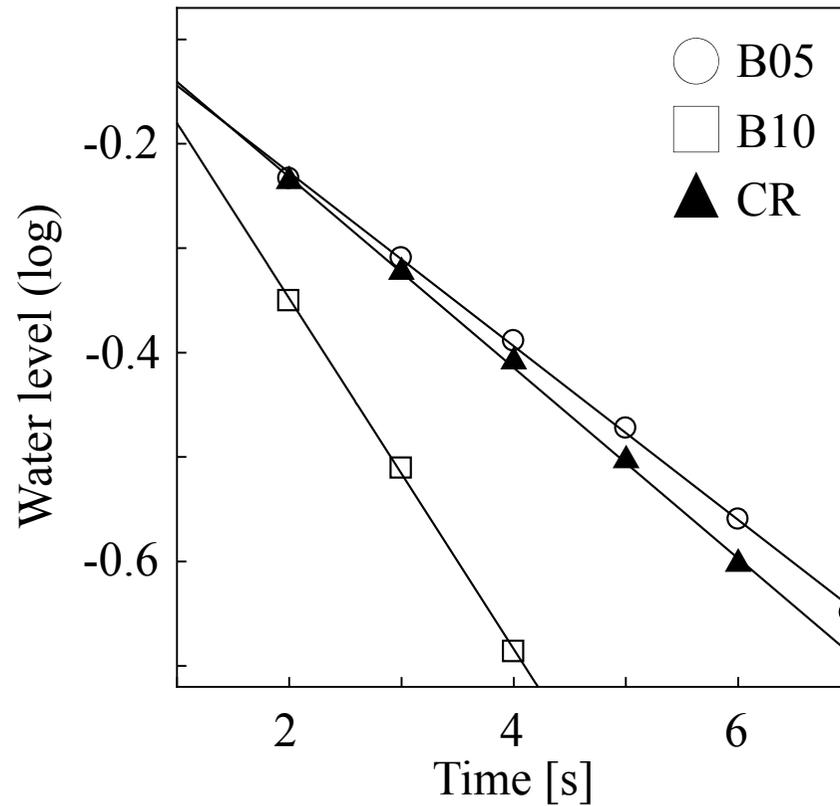


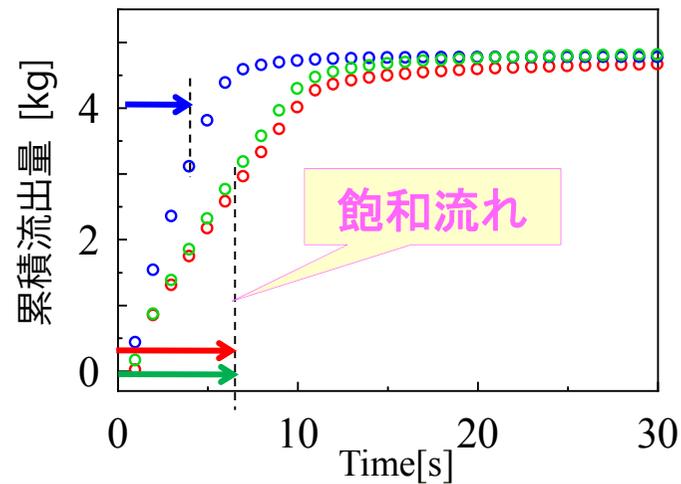
Fig.5 Water level changes during the saturated flows

実は、詳しくみると、これは曲線となっている。



浸透率の推定 方法

● 実験結果 (飽和流れ)



累積流出量 $Q_{obs,t}$

● 飽和流れの数値計算

$$J = - \left(\frac{\mu}{\rho g K} u_F + b u_F |u_F| \right)$$

Ergun(1952)の式より

$$a = \frac{\mu}{\rho g K} \quad b = \left(0.0204 \frac{\rho_f a}{\mu_f g \phi^3} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$u_{F,w}$: 流速[m/s] S_p : 飽和度[-] $k_{r,f}$: 相対浸透率[-]
 $\rho_p q_p$: 水相の質量生産速度[kg/(m³s)]

$Q_{cal,t}[K]$

● 目的関数

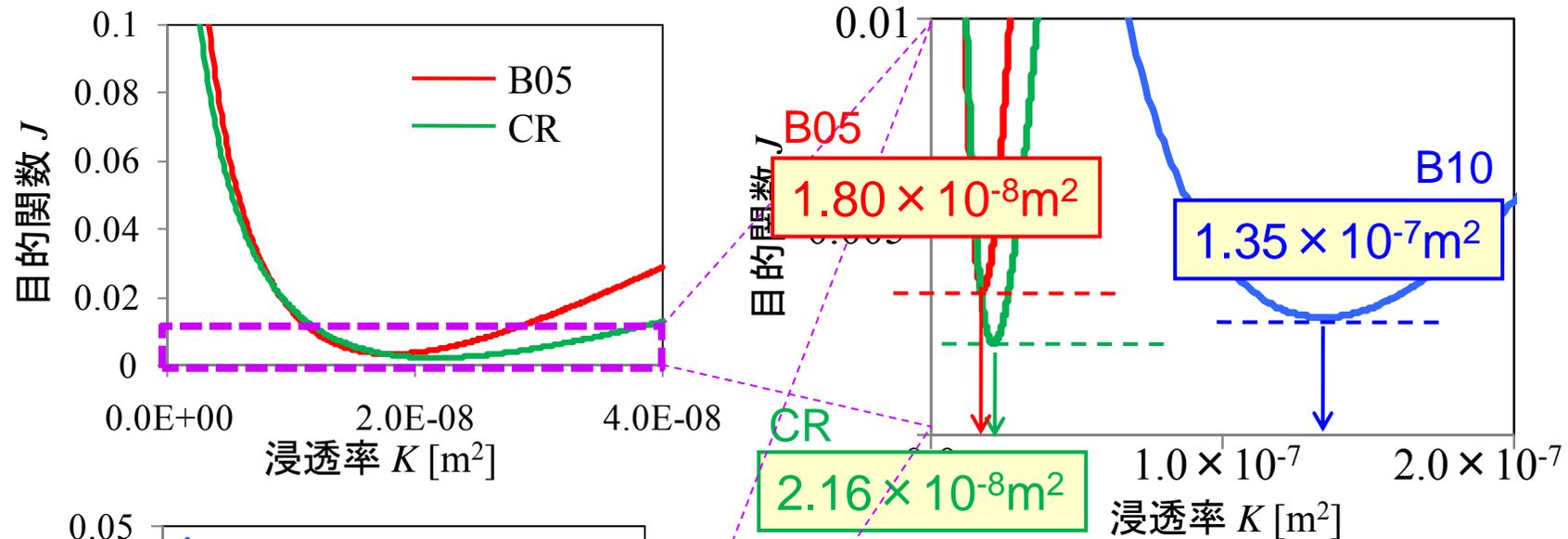
$$J = \sum_{t=1}^n \left[Q_{cal}(K) - Q_{obs} \right]^2$$

t : 時間, n : 飽和流れの区間

目的関数 J が
最小になる K を推定

浸透率の推定結果 (吉岡、2010)

絶対浸透率と J (目的関数) の関係



目的関数 J を最小にする浸透率 K :

	K	J
B05	1.80×10^{-8}	0.00352
B10	1.35×10^{-7}	0.00284
CR	2.16×10^{-8}	0.00220

Darcy流れとして逆解析

K^* : 慣性効果の入った値

Forchheimerとして逆解析

K : 層流状態の本来の浸透率
で、 K^* の5~10倍程度

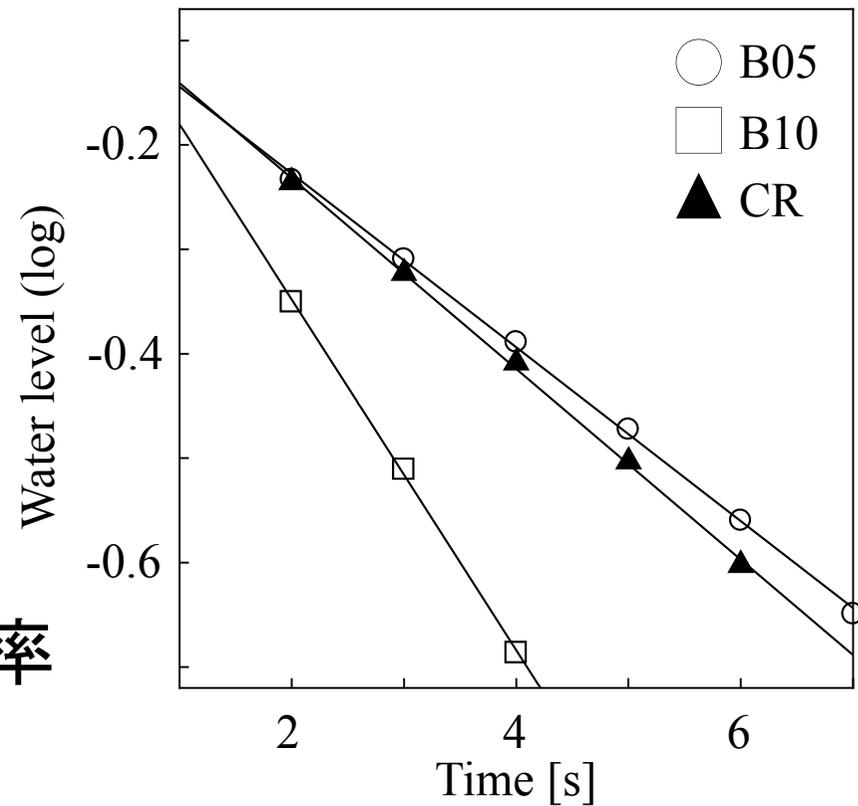
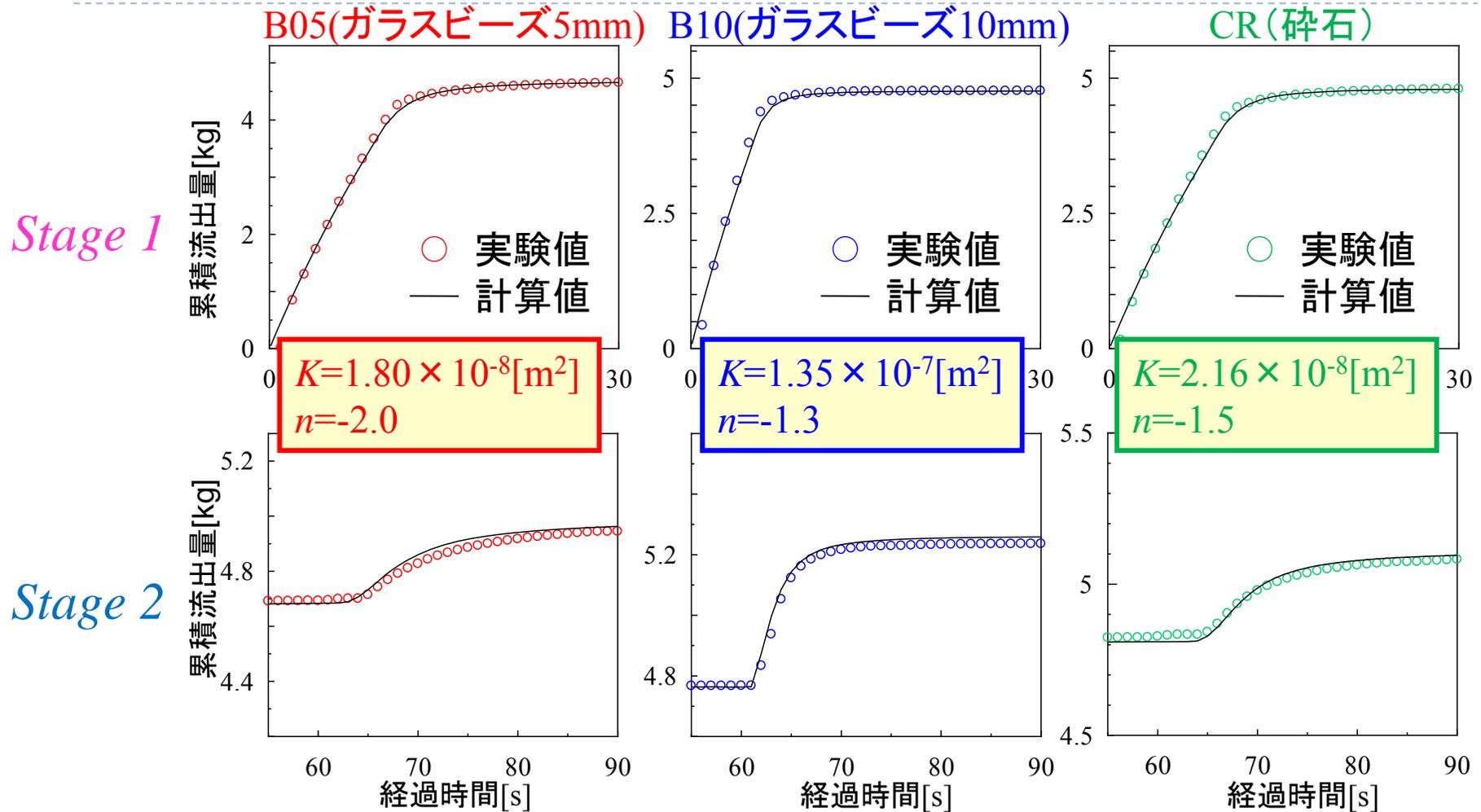


Fig.5 Water level changes during the saturated flows



再現計算結果 (吉岡, 2010)



- 本手法により推定した浸透率 K を用い、相対浸透率にかかる係数 n に負の値を与えることで、媒体の異なる3種の実験結果を良好に再現することができた。

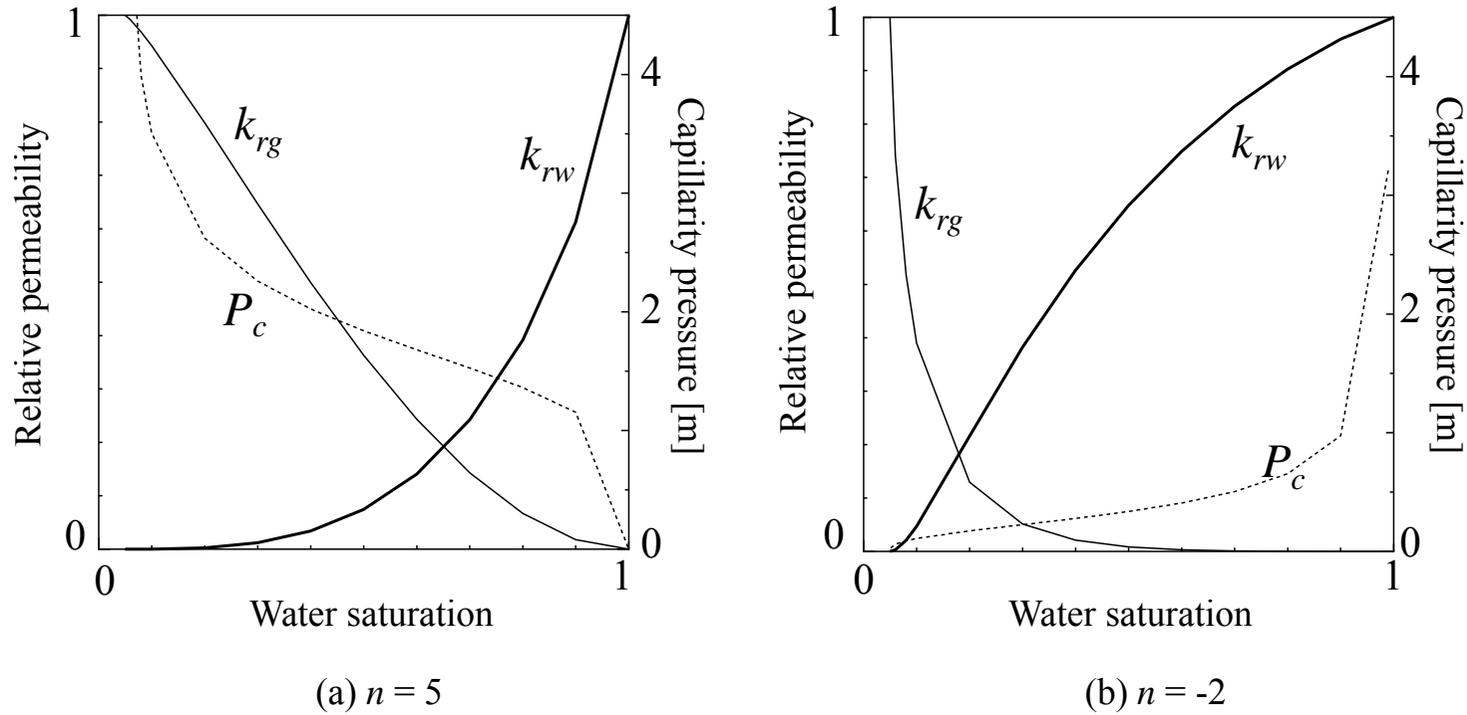


Fig.9 The relationships between water saturation and capillarity pressure (P_c), relative permeability of liquid (k_{rw}) and gas (k_{rg}) by van Genuchten model with $n = 5$ (a) and $n = -2$ (b).

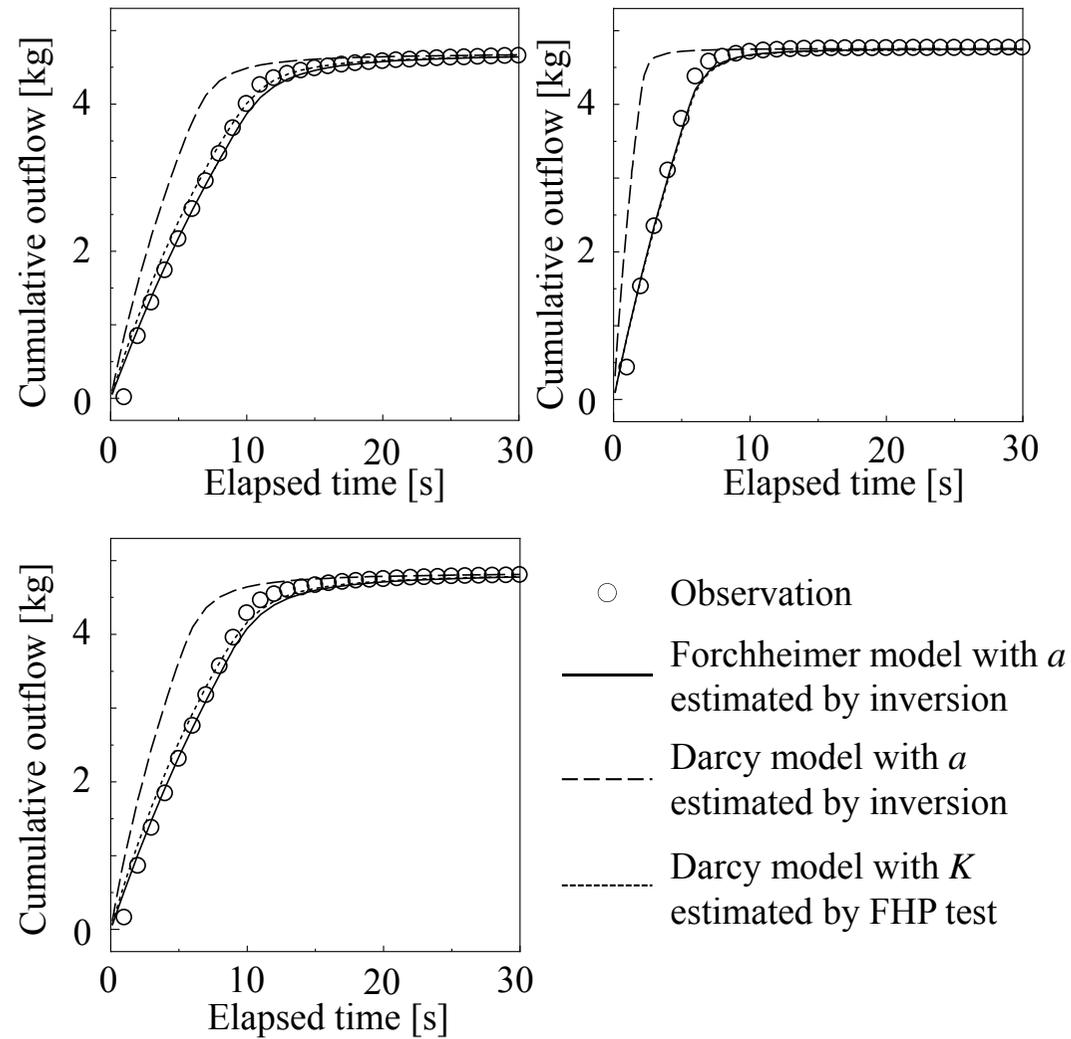


Fig.10 Comparing results of Forchheimer model between Darcy model with the estimated coefficients a and b by inversion analysis and the falling head permeability (FHP) method.

得られた知見

- 変水位試験からDarcy流れを仮定して回帰された浸透率は、 K^* はもはやDarcy浸透率ではなく、慣性流状態の浸透率である。
 - 変水位試験の結果からForchheimerモデルにより得られる浸透率は本来のDarcy 浸透率 K と考えられる。
 - K は K^* の数倍大きくなる。
 - Forchheimer式と K を使って、実験結果は良好に再現される。
 - Darcy式と K を使って実験結果は再現されない。
 - Darcy式と K^* を使って、実験結果はある程度再現できる。
 - 高透水媒体中の不飽和流れの相対浸透率は通常の形から大きく異なり、比較的直線的になる。
-



まとめ

- 陸域の水の流れには、大きく層流、慣性流、乱流がある。
- 地表流はManning型乱流、地下はDarcy型層流、そして、地下浅部高透水性媒体中の不飽和浸透ではForchheimer型慣性流が考えられる。
- 不飽和慣性流は、通常と形の異なる相対浸透率形により再現可能であると考えられる。
- 不飽和慣性流の効果が水文解析結果に与える影響については、今後の検討が必要であるが、Forchheimer型により水文系全体をモデル化することが望ましいかもしれない。

